

Études de Fonctions numériques

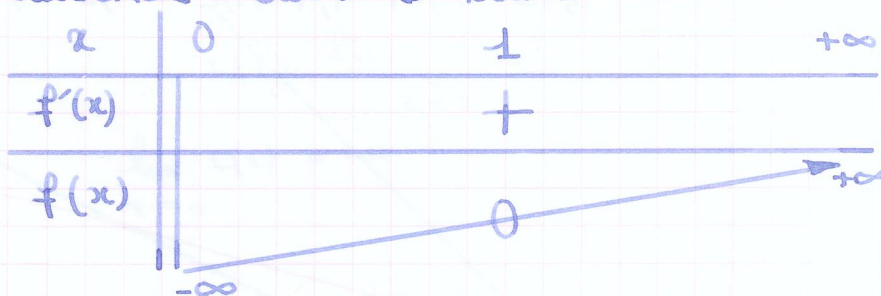
à variables réelles - Tracés

$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}$$

$$f(x) = \ln x$$

$$f'(x) = \frac{1}{x} > 0.$$

f est strictement croissante sur $\mathbb{R}^{+*}$.



f est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$

$$f(x) = x \ln x$$

$$\mathcal{D} =]0; +\infty[.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0.$$

le prolongement par continuité F est la fonction définie

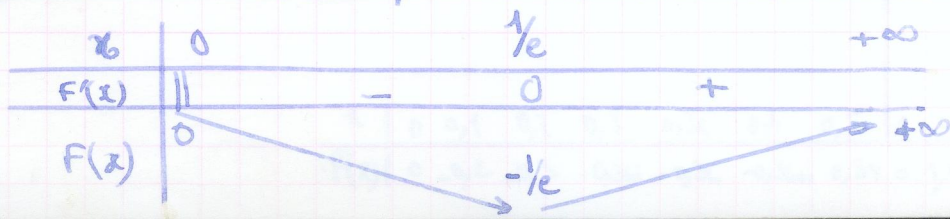
par :

$$\begin{cases} \forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F(x) = x \ln x \\ F(0) = 0. \end{cases}$$

* Dérivation

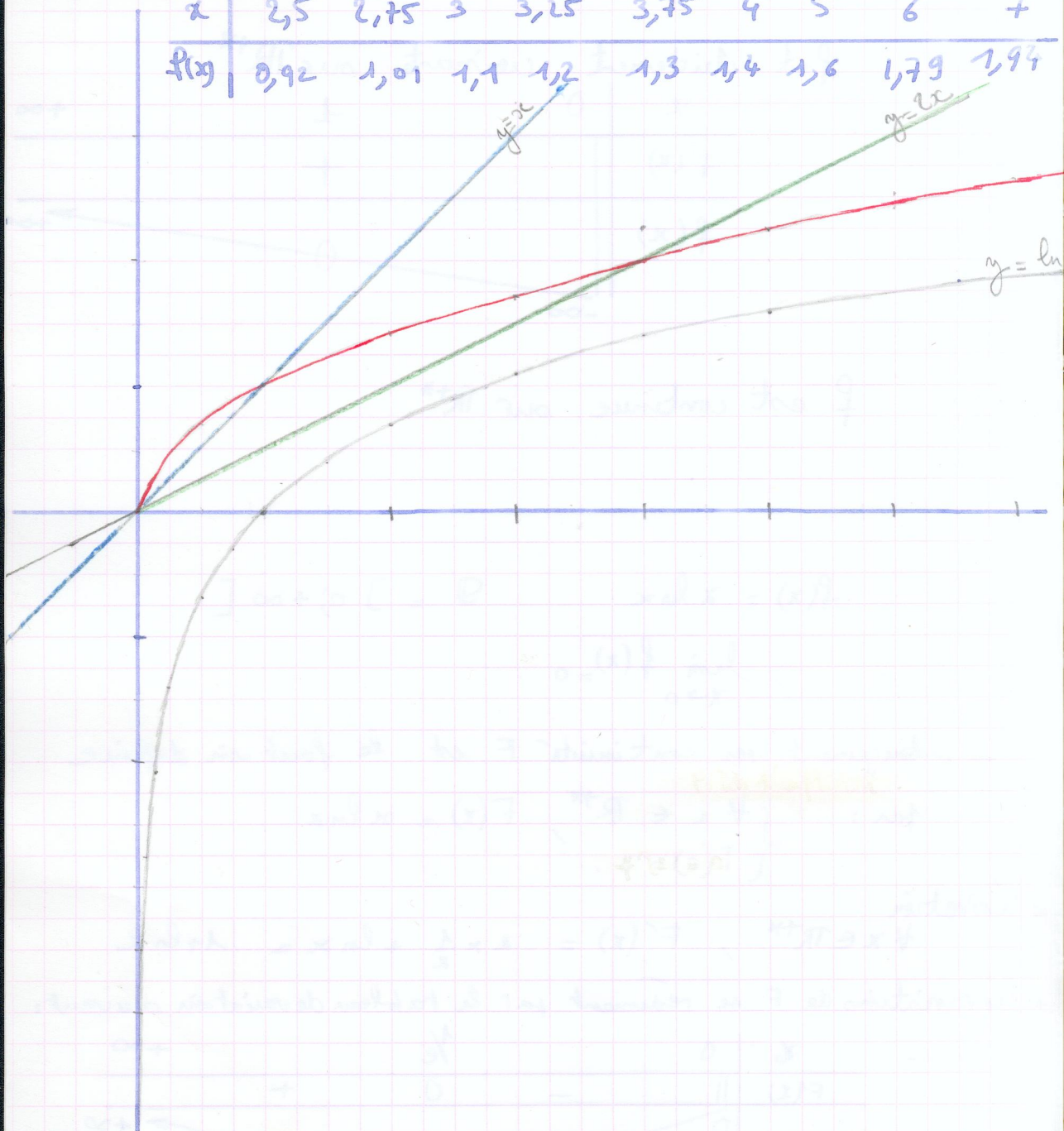
$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, F'(x) = x \times \frac{1}{x} + \ln x = 1 + \ln x$$

* les variations de F se résument par le tableau de variation suivant :



x	0,125	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25
$f(x)$	-2,08	-1,39	-0,7	-0,3	0	0,22	0,4	0,56	0,7	0,81

x	2,5	2,75	3	3,25	3,75	4	5	6	7
$f(x)$	0,92	1,01	1,1	1,2	1,3	1,4	1,6	1,79	1,94

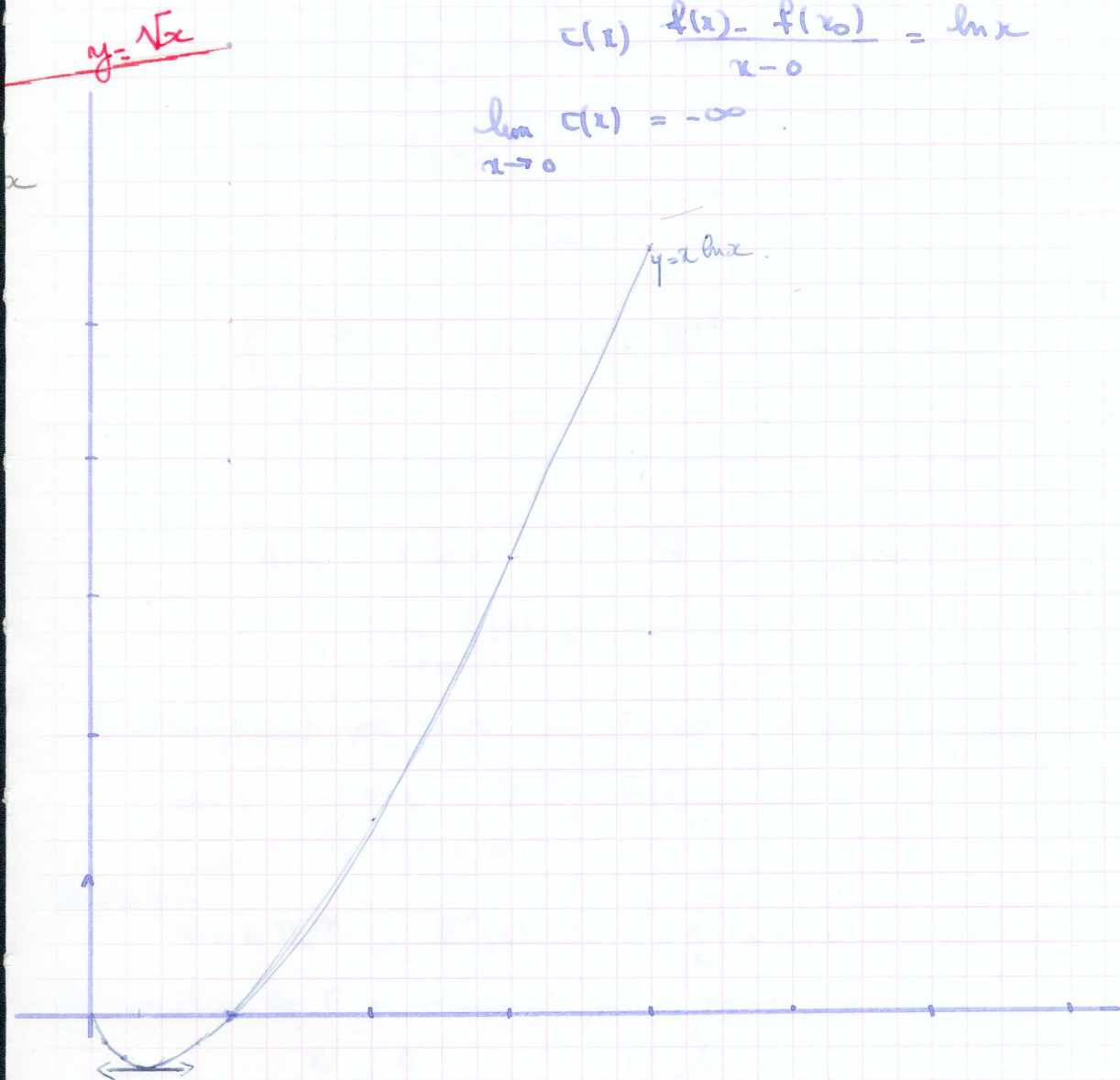


$\times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x} = +\infty \rightarrow$ direction asymptotique : (Oy)

$\times$ tangente en 0 :

$$c(x) = \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \ln x$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} c(x) = -\infty$$

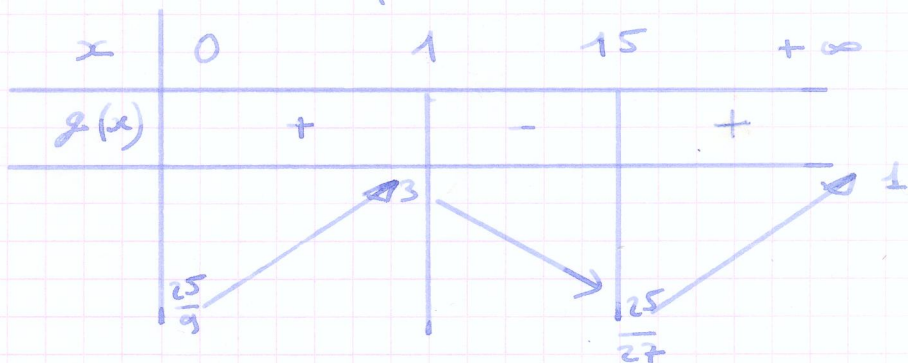


x	0	0,1	0,2	0,3	0,36	0,4	0,5	1	2	3	4
f(x)	0	-0,2	-0,3	-0,36	-0,36	-0,36	-0,36	0,34	0	1,473	5,5

$$\forall x \in \mathbb{R}^+$$

$$g(x) = \frac{x^2 - 5x + 25}{x^2 - 3x + 9}$$

$$g'(x) = \frac{2(x-1)(x-15)}{(x^2 - 3x + 9)^2}$$



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75
$g(x)$	2,78	2,86	2,93	2,98	3	2,98	2,92	2,83

x	2	2,25	2,5	2,75	3	3,25	3,5	4
$g(x)$	2,71	2,57	2,42	2,26	2,11	1,97	1,83	1,61

x	4,5	5	6	7	8	10	15	20	50
$g(x)$	1,44	1,3	1,15	1,05	1	0,95	0,926	0,93	0,96

$D: y=1$



$$\forall x \in \mathbb{R}$$

$$f(x) = \frac{2x^2 + x - 1}{x^2 - x + 1}$$

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{(x^2 - x + 1)(4x + 1) - (2x^2 + x - 1)(2x - 1)}{(x^2 - x + 1)^2} \\ &= \frac{x - 4x^3 + x^2 - 4x^2 - x + 4x + 1 - 4x^2 + 2x - 2x^2 + 1}{(x^2 - x + 1)^2} \\ &= \frac{-3x^2 + 6x}{(x^2 - x + 1)^2} \end{aligned}$$

le signe de $f'(x)$ dépend du signe du binôme du 2nd degré :

$$-3x^2 + 6x = 3(x)(2 - x)$$

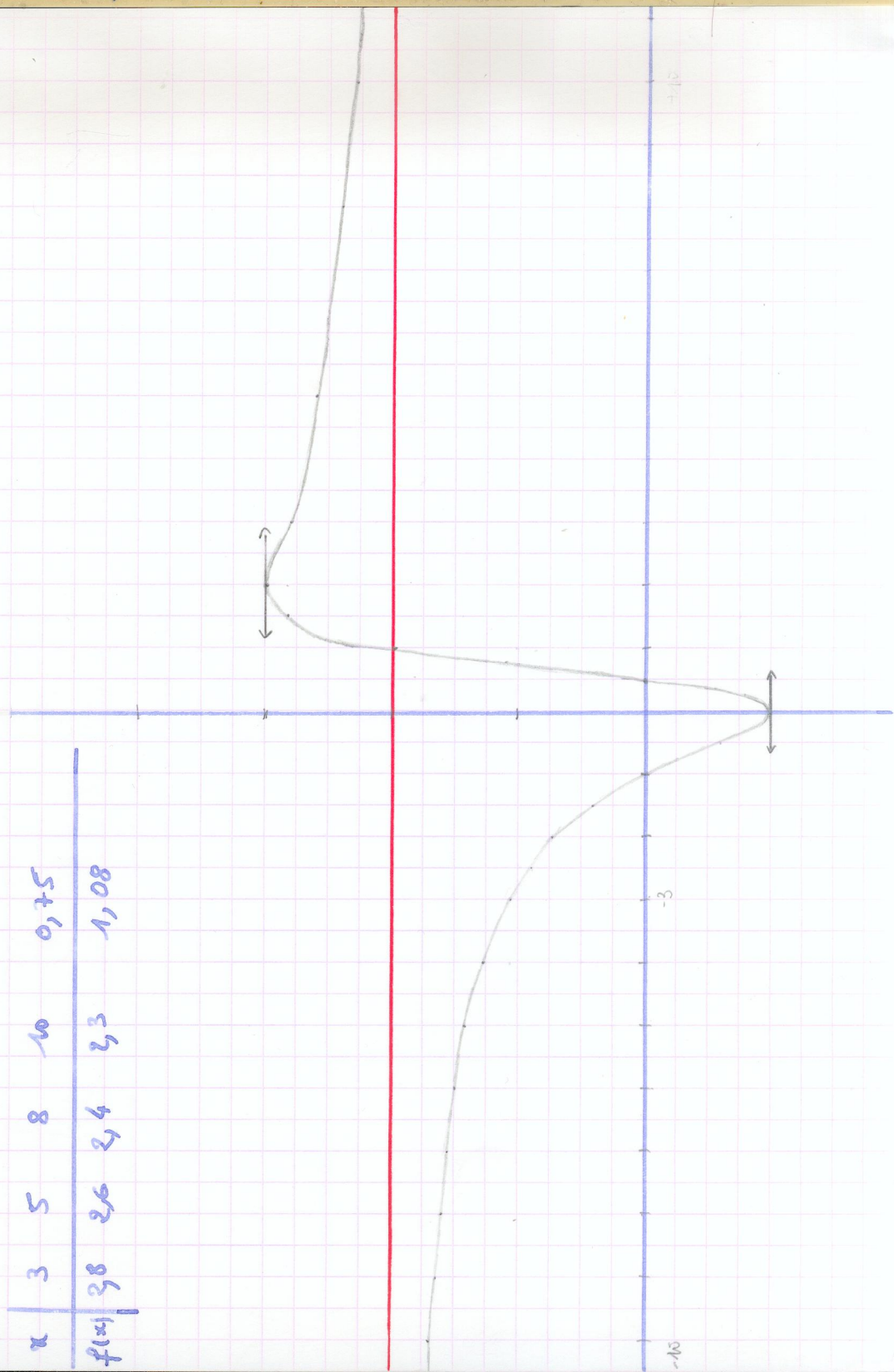
(signe de a à l'extérieur des racines)

Les variations de f se résument par le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	2	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$	2^-	-1	3	2^+	

x	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	0	0,5	1	1,5	2
$f(x)$	1,7	1,67	1,63	1,58	1,5	1,42	1,28	1,07	0,99	0,71	0,42	0	-0,6	-1	0	2	2,8	3

x	3	5	8	10	0,75
$f(x)$	3,8	2,6	2,4	2,3	1,08



$$f_m(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2 + mx + 1}$$

si $m \in]-2; 2[\quad \exists f_m(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}$

si $m = 2$ ou $m = -2 \quad \exists f_m(x) \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\frac{m}{2}\}$

si $m \in]-\infty; -2[\cup]2; +\infty[, \exists f_m(x), \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, x_2\}$

x_1 et x_2 telles

$$\text{que } x_1 = \frac{-m + \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

$$\text{et } x_2 = \frac{-m - \sqrt{m^2 - 4}}{2}$$

*
$$f_{-2}(x) = \frac{(x-1)^3}{(x-1)^2} = x-1 \quad \forall x \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$$

ℓ_{-2} est la droite d'équation $y = x-1$ privée du point d'abscisse 1.

* $m \neq -2$ Toutes courbes $\mathcal{C}_m$ passe par deux pts fixes A et B:

$$\forall m, (x-1)^3 = y(x^2 + mx + 1)$$

$$\text{et } \forall m, Am + B = 0.$$

$$\rightarrow m(x-y) + y(x^2+1) - (x-1)^3 = 0$$

$$\rightarrow x=0 \rightarrow y=-1$$

$$y=0 \rightarrow x=1$$

Toutes les courbes passent par

A(1; 0) et B(0; -1) -

Dérivation : ($m \neq -2$)

$$\begin{aligned} f'_m(x) &= \frac{3(x^2+mx+1)(x-1)^2 - (x-1)^3(2x+m)}{(x^2+mx+1)^2} \\ &= \frac{(x-1)^2 [3(x^2+mx+1) - (x-1)(2x+m)]}{(x^2+mx+1)^2} \end{aligned}$$

le signe de $f'_m(x)$ dépend de $P(x) = 3(x^2+mx+1) - (x-1)(2x+m)$

$$\begin{aligned} &= 3x^2+3mx+3-2x^2-x+2x+m \\ &= x^2+2mx+m+3+x \\ &= x^2+(2m+2)x+(m+3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta' &= (m+1)^2 - (m+3) \\ &= (m+1)^2 - m - 3 \\ &= m^2+m-2 = (m+2)(m-1) \end{aligned}$$

si $\Delta' \leq 0$, $f'_m(x)$ garde un
signe constant sur $\mathbb{R}$ et $f_m(x)$ est monotone
 $\rightarrow f_m(x)$ est monotone si $m \in]-2; -1]$.

Etude de $f_1(x)$: $f_1(x) = \frac{(x-1)^3}{x^2+x+1} \quad \forall x \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} &= \frac{ax+b}{x^2+x+1} + \frac{cx+d}{x^2+x+1} \\ &= \frac{ax^3+ax^2+ax+bx^2+bx+b+cx+d}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

$$= \frac{ax^3 + (a+b)x^2 + (a+b+c)x + (b+d)}{x^2 + x + 1}$$

Identification :

$$(x-1)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - 1$$

$$\begin{cases} a = 1 \\ b = -4 \\ c = 6 \\ d = 3 \end{cases}$$

d'où $f_1(x) = x - 4 + \frac{3(2x+1)}{x^2+x+1}$

$$f'_1(x) = \frac{(x-1)^2 (x^2+4x+4)}{(x^2+x+1)^2}$$

Variations de $f_1(x)$ se résument par le tableau suivant :

x	$-\infty$	-2	1	$+\infty$
$f'_1(x)$	+	○	+	+
$f_1(x)$	$-\infty$	-9	0	$+\infty$

Asymptote oblique : $D: y = x - 4$

pour $x < -\frac{1}{2}$ la courbe est au dessous
 $x > -\frac{1}{2}$ " " au dessus
 $x = -\frac{1}{2}$ la courbe coupe l'asymptote

Changement de Repère :

$$M(x; y) \text{ dans } (O; \vec{i}, \vec{j}) \rightarrow \vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$M(x; y) \text{ dans } (L; \vec{i}, \vec{j}) \rightarrow \vec{LM} = x\vec{i} + y\vec{j}$$

$$L(-\frac{1}{2}; -\frac{9}{2})$$

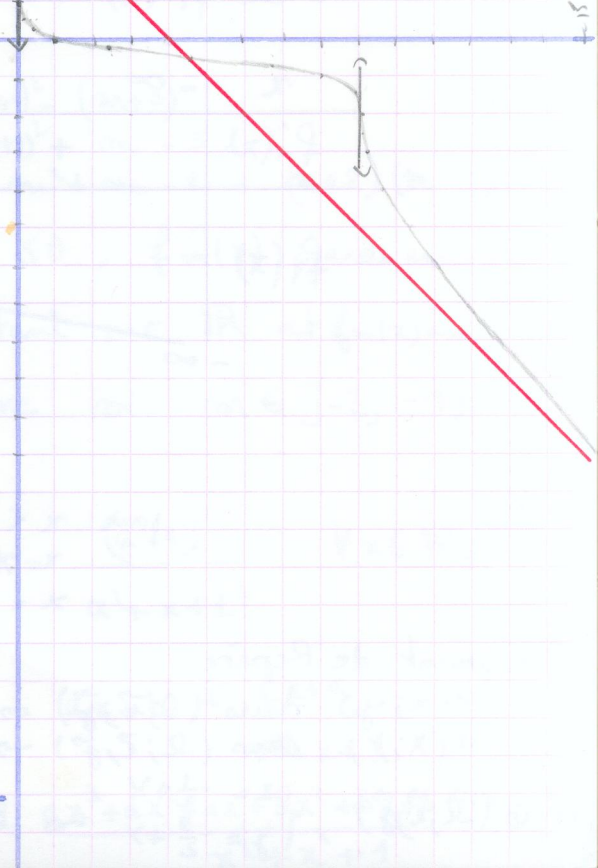
Dans $(L; \vec{i}, \vec{j})$, $\begin{cases} x = -\frac{1}{2} + X \\ y = -\frac{9}{2} + Y \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = x + \frac{1}{2} \\ Y = y + \frac{9}{2} \end{cases}$

x	-11	-10	-9	-8	-7	-6	-5	-4
$f_1(x)$	-15,86	-14,6	-13,7	-12,8	-11,9	-11	-9,3	-9,6

x	-3	-2,5	-2	-1,5	-1	-0,5	-0,25	-0,25
$f_1(x)$	-9,1	-9,03	-9	-8,93	-8	-4,5	-6,6	-1,4

x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75
$f_1(x)$	-1	-0,32	-0,1	$-7 \cdot 10^{-3}$	0	0,004	0,03	0,14

x	2,5	3	4	5	6	7	8	9	10	11
$f_1(x)$	0,25	0,6	1,3	2,1	2,9	3,8	4,7	5,6	6,5	7,5



$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-3, 2\}, f(x) = \frac{3x^2 + 4x - 25}{x^2 + x - 6} = \frac{3x^2 + 4x - 25}{(x+3)(x-2)}$$

$$f'(x) = \frac{(x^2 + x - 6)(6x + 4) - (3x^2 + 4x - 25)(2x + 1)}{(x^2 + x - 6)^2}$$

$$= \frac{\cancel{6x^3} + 4x^2 + \cancel{6x^2} + 4x - 36x - 24 - \cancel{6x^3} - 3x^2 - 8x^2 - \cancel{4x} - 25x + \cancel{50x} + 25}{(x^2 + x - 6)^2}$$

$$= \frac{-x^2 + 14x + 1}{(x^2 + x - 6)^2}$$

le signe de $f'(x)$ dépend du signe du binôme du 2nd degré

$$-x^2 + 14x + 1$$

$$\Delta' = 49 + 1 = 50$$

$$x = \frac{-7 \pm \sqrt{50}}{-1} = 1 \pm \sqrt{50}$$

$$\rightarrow x_1 \approx -0,07 \text{ ou } x_2 \approx 14,07$$

$$f(x) = a + \frac{b}{x+3} + \frac{c}{x-2}$$

$$= \frac{a(x+3)(x-2) + b(x-2) + c(x+3)}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^2 + ax - 6a + bx - 2b + cx + 3c}{(x+3)(x-2)}$$

$$= \frac{ax^2 + (a+b+c)x + (-6a - 2b + 3c)}{(x+3)(x-2)}$$

Identification:

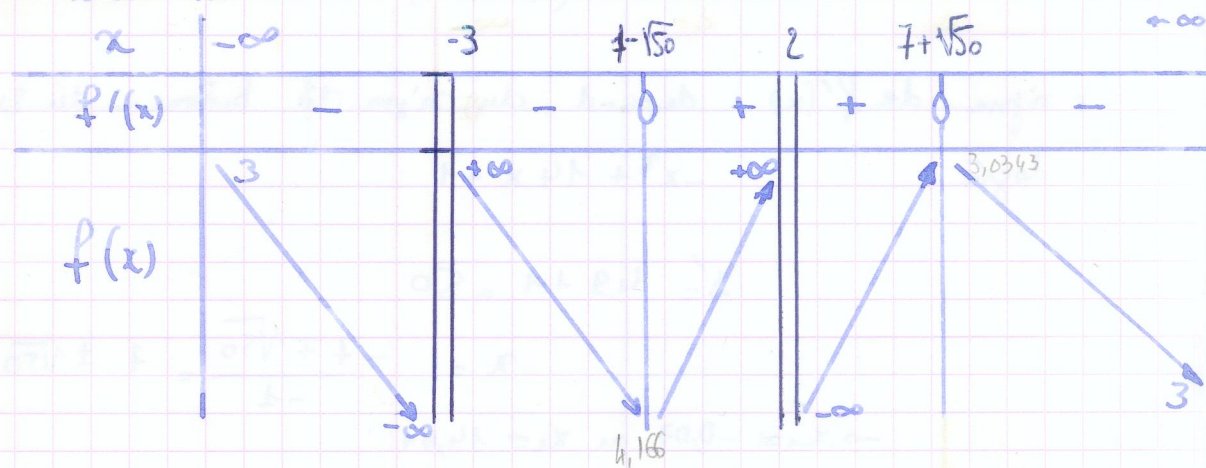
$$\begin{cases} a = 3 \\ a+b+c = 4 \\ -6a - 2b + 3c = -25 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b+c = 1 \\ -2b+3c = -7 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 1-c \\ -2(1-c) + 3c = -7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 3 \\ b = 2 \\ c = -1 \end{cases}$$

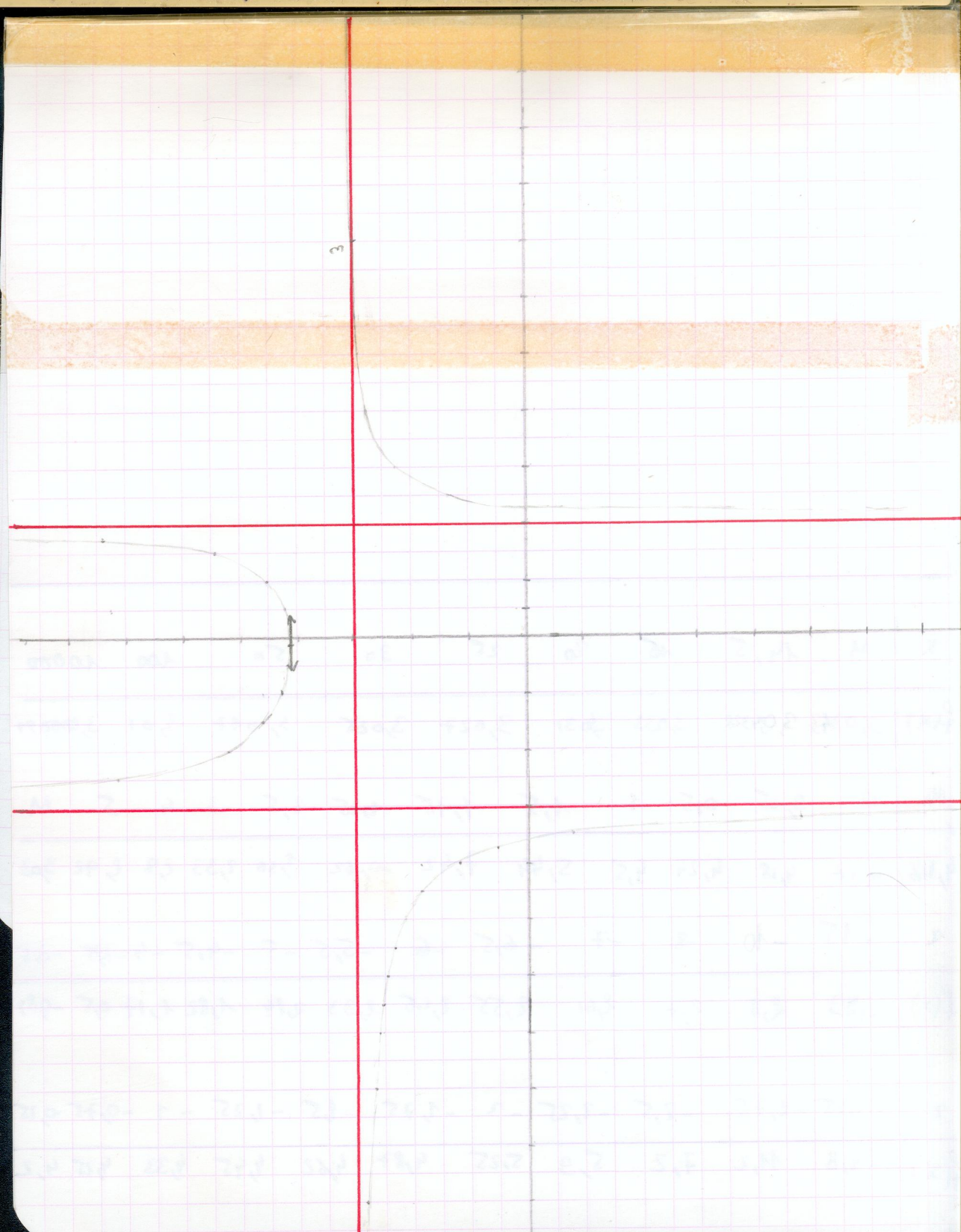
$$\leadsto f(x) = 3 + \frac{2}{x+3} + \frac{(-1)}{x-2}$$

$\rightarrow$ primitive? $f(x) = 3x + 2\ln|x+3| - \ln|x-2| + K$

Variation



x	M	14,5	15	20	25	30	50	100	10000				
$f(x)$		3,0343	3,034328	3,033	3,031	3,027	3,025	3,017	3,01	3,000099			
m	0	0,25	0,5	1	1,5	1,75	2,25	2,5	3	4	5	M	
	4,166	4,17	4,18	4,24	4,5	5,44	7,42	-0,62	1,36	2,33	2,8	2,92	3,03
x	-15	-10	-8	-7	-6,5	-6	-5,5	-5	-4,5	-4	-3,5	-3,5	
$f(x)$	2,89	2,8	2,7	2,61	2,55	2,46	2,33	2,14	1,82	1,17	0,5	-0,81	
x	-3,25	-2,75	-2,5	-2,25	-2	-1,75	-1,5	-1,25	-1	-0,75	-0,5	-0,25	
$f(x)$	-4,8	11,2	7,2	5,9	5,25	4,87	4,62	4,45	4,33	4,25	4,2	4,1	



$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in \mathbb{R}, \begin{cases} f_n(x) = x^n \ln|x| \\ f_n(0) = 0. \end{cases}$$

1) parité

$$\begin{aligned} f_n(-x) &= (-x)^n \ln|x| \\ &= -x^n \ln|x| \end{aligned}$$

* si n est pair $(-x)^n = x^n$

$$\rightarrow f_n(-x) = f_n(x)$$

$\rightarrow f_n$ est paire : symétrie / (Oy)

* si n est impair $(-x)^n = -x^n$

$$\rightarrow f_n(-x) = -f_n(x)$$

$\rightarrow f_n$ est impaire : symétrie par rapport à O.

* dérivation ($x \neq 0$)

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= n x^{n-1} \ln|x| + \frac{1}{x} x^n \\ &= x^{n-1} (n \ln|x| + 1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x=0: \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f_n(x) - f_n(0)}{x - 0} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^n \ln|x|}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-1} \ln|x| \end{aligned}$$

discussion : si $n=1$, $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln|x| = -\infty$

si $n \geq 2$

$$\tau(x) = x^{n-2} \underbrace{x \ln|x|}_{\text{tend vers 0 au 0}}$$

$$\text{si } n=2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = 0$$

donc f est dérivable en 0

$$\text{si } n \geq 2 \rightarrow \lim_{x \rightarrow 0} \tau(x) = \lim_{x \rightarrow 0} x^{n-2} = 0$$

donc f est dérivable en 0 $\forall n \geq 2$

points relatives de $\mathcal{C}_n$ et $\mathcal{C}_{n+1}$

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^* \quad \varphi(x) &= f_{n+1}(x) - f_n(x) \\ &= x^{n+1} \ln|x| - x^n \ln|x| \\ &= \ln|x| (x^{n+1} - x^n) \\ &= \ln|x| \underbrace{(x^n (x-1))}_0 \end{aligned}$$

le signe de $\varphi(x)$ dépend du

signe de $(x-1) \ln|x|$

$$\left. \begin{array}{l} \text{si } x > 1 \\ \text{si } x < 1 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \varphi(x) > 0 \\ \varphi(x) < 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} \text{la courbe } \mathcal{C}_{n+1} \text{ est} \\ \text{au-dessus de} \\ \text{la courbe } \mathcal{C}_n \end{array}$$

* Point invariant : A(1;0) ; O(0,0) & (-1;0)

* Tangente en A : $T_A: f'_n(1) = 1 \quad \forall n$

: toutes les courbes admettent la tangente en 1
(y=x)

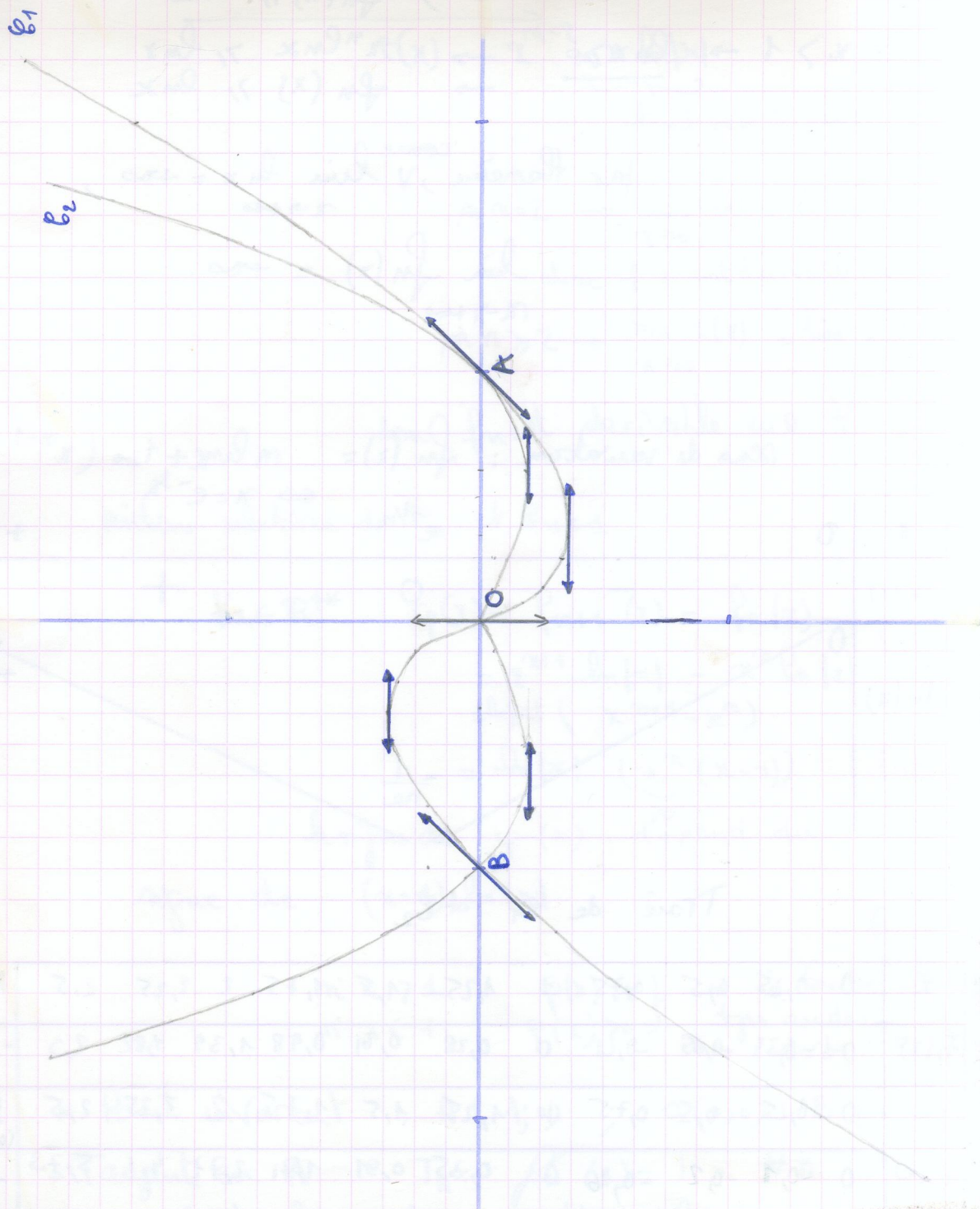
$\forall x > 1 \rightarrow \underline{\ln x \geq 0}$

par thèse, ^{comme} $\lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$,

Ans de variation : $f_n'(x) = n \ln x + 1 = 0 \quad (x^{n-1} > 0)$
 $e^{-1/n} \Rightarrow x = e^{-1/n} \quad +\infty$



x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	$\sqrt{e}$
$f_1(x)$	0	-0,34	-0,35	-0,21	0	0,28	0,61	0,98	1,39	1,82	2,3	$-\frac{1}{\sqrt{e}}$
x	0	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,25	2,5	$\frac{1}{\sqrt{e}}$
$f_2(x)$	0	-0,1	-0,2	-0,16	0	0,35	0,91	1,71	2,77	4,1	5,73	$(0,606)$ $-0,18$



$$\forall x \in \mathbb{R}^{+*}, f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n}$$

$$\begin{aligned} \text{étude : } f'_n(x) &= \frac{x^{n-1} - (n x^{n-1} \ln x)}{x^{2n}} \\ &= \frac{x^{n-1} (1 - n \ln x)}{x^{2n}} \end{aligned}$$

le signe de $f'_n(x)$ dépend du signe de $(1 - n \ln x)$
 $\left(\frac{x^{n-1}}{x^{2n}} > 0 \text{ car } x > 0 \right).$

$$1 - n \ln x = 0$$

$$\Leftrightarrow \ln x^n = 1$$

$$\Leftrightarrow x^n = e$$

$$\Leftrightarrow x = e^{1/n}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = -\infty \quad \left(\lim_{x \rightarrow 0} \ln x = -\infty \text{ et } \lim_{x \rightarrow 0} x^n = 0^+ \right).$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f_n(x) = 0 \quad \left[\text{en effet, } f_n(x) = \frac{\ln x}{x^n} = \frac{1}{n} \times \frac{n \ln x}{x^n} \right]$$

$$\text{or, } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \quad \left(\text{et } \lim_{x \rightarrow \infty} x^n = \lim_{x \rightarrow \infty} x = +\infty \right) = \frac{1}{n} \times \frac{\ln x^n}{x^n}]$$

x	0	$e^{1/n}$	$+\infty$
$f'_n(x)$		+	0
$f_n(x)$	$-\infty$	$\frac{1}{ne}$	0

$$f_n(e^{1/n}) = \frac{\ln(e^{1/n})}{e} = \frac{1}{ne}$$

tracé : la (C_1) admet 2 asymptotes :
la droite $(O, \vec{x})$ et la droite $(O, \vec{y})$

tangente à (Ox) au point $(e; \frac{1}{e})$.

Un tableau de valeurs approchées permet de préciser

le tracé : $f(x) = \frac{\ln x}{x}$

x	0,25	0,5	0,75	1	1,25	1,5	1,75	2	2,18	3	4
$f_1(x)$	-5,54	-1,4	-0,4	0	0,2	0,3	0,32	0,35	0,37	0,36	0,34

x	5	6	8	15
$f_1(x)$	0,32	0,29	0,26	0,18.

e_1



x

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) ?$$

si $n = 1$ $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_1(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \ln^2 x = +\infty$.

si $n \geq 2$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = ?$

$$I_n(x) = \frac{1}{-n+1} \frac{\ln x}{x^{n-1}} - \frac{1}{(-n+1)^2} \cdot \frac{1}{x^{n-1}} + \frac{1}{(-n+1)^2}$$

on sait que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^{n-1}} = 0$ car $n-1 > 0$

et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^{n-1}} = 0$.

d'où, $\lim_{x \rightarrow +\infty} I_n(x) = \frac{1}{(-n+1)^2}$ pour tout $n \geq 2$

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = 1 - e^{-\lambda x} \quad (\lambda \in \mathbb{R}^{+*}).$$

$$f'_\lambda(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

la fonction exponentielle étant strictement positive,
et λ étant aussi strict. positif, $f'_\lambda(x) > 0$

d'où $f_\lambda(x)$ est strictement croissante
sur $\mathbb{R}$.

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f_\lambda(x) = -\infty \quad \text{en effet} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{\lambda x} = 0^+$$

$$\text{d'où} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-\lambda x} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f_\lambda(x) = 1 \quad \text{en effet} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-\lambda x} = 0$$

Les variations de f_λ se résument par le tableau suivant:

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'_\lambda(x)$	+	$\lambda +$	+
$f_\lambda(x)$	$-\infty$	0	1

tangente en 0 :

$$T_0 : y - 0 = f'(0)(x)$$

$$\rightarrow y = \lambda x$$

pour un point M du plan, soit H le projeté orthogonal sur $(0; \vec{j})$ et M' le point défini par $\overrightarrow{HM} = \lambda \overrightarrow{HM'} \Leftrightarrow \overrightarrow{HM'} = \frac{1}{\lambda} \overrightarrow{HM}$

$$M(x; y)$$

$$M'(x' = \frac{x}{\lambda}; y' = y)$$

$$M \in \mathcal{C}_1 \Leftrightarrow y = f_1(x) = 1 - e^{-x}$$

$$\Leftrightarrow y' = 1 - e^{(-\lambda x')}$$

$$\Leftrightarrow M' \in \mathcal{C}_\lambda$$

Conclusion inductive: ^{et} l'image de $\mathcal{C}_1$ par affinité d'axe $(0; \vec{j})$ de direction $(0; i)$ et de rapport $\frac{1}{\lambda}$

Tracés de $\mathcal{C}_1$ et $\mathcal{C}_2$.

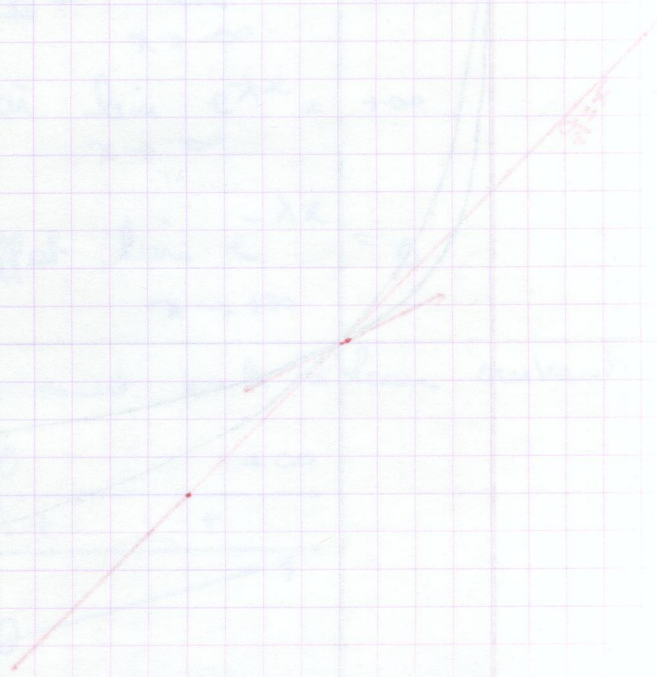
- les courbes passent par 0 avec une pente de 1 et 2 respect.
- Asymptote : la droite d'équation $y = 1$

On passe de $\mathcal{C}_1$ à $\mathcal{C}_2$ en multipliant
par chaque point l'abscisse par $\frac{1}{2}$

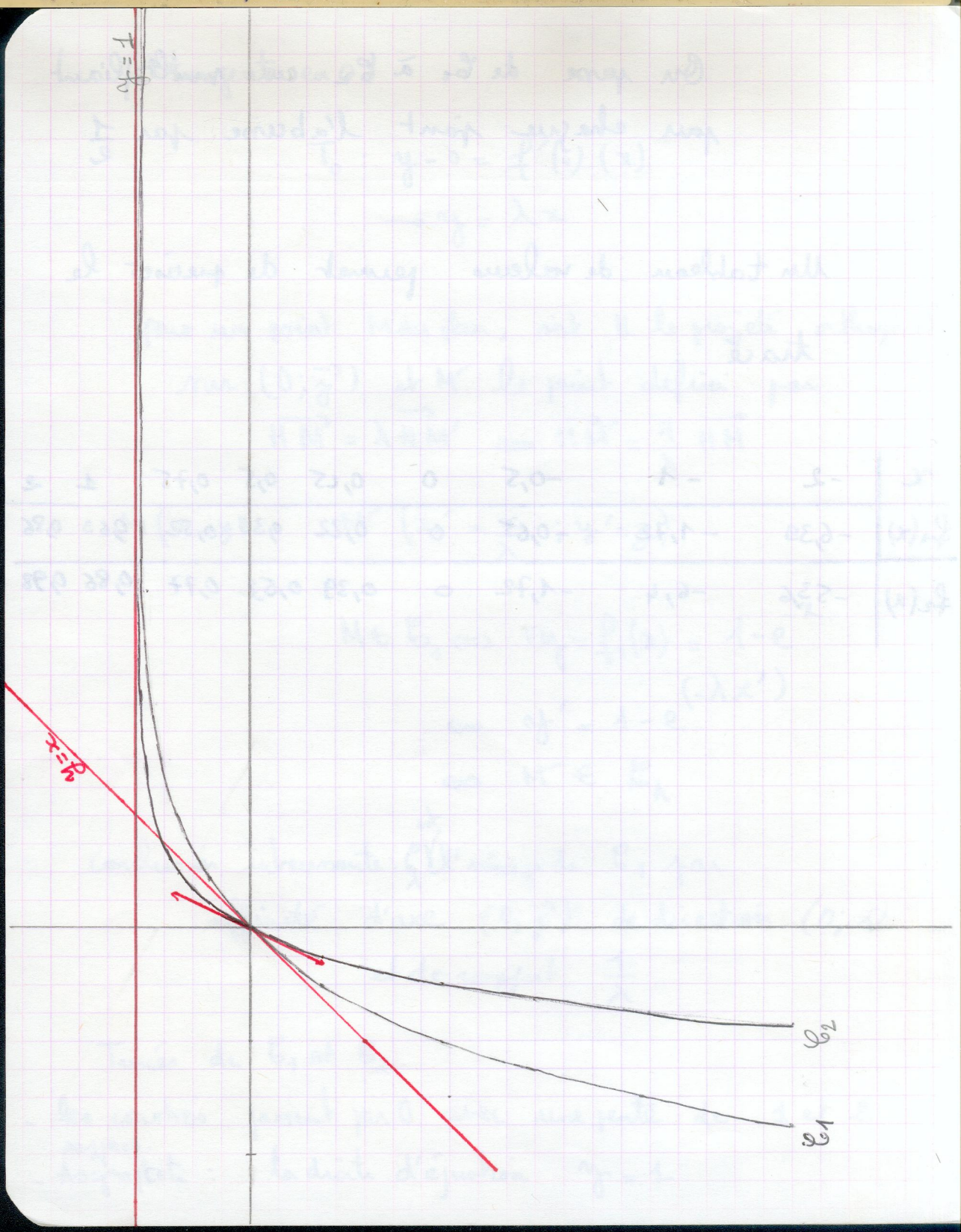
Un tableau de valeurs permet de préciser le

tracé :

x	-2	-1	-0,5	0	0,25	0,5	0,75	1	2
$f_1(x)$	-6,39	-1,72	-0,65	0	0,22	0,39	0,52	0,63	0,86
$f_2(x)$	-53,6	-6,4	-1,72	0	0,39	0,53	0,77	0,86	0,98



$$f = f_0$$



$$f_p(x) = \sqrt{2^p - x^p}$$

étude de l'ensemble de définition.

tracé de 2^p et x^p

$$p=3$$

$$\text{et } p=2/4$$

$$x^3$$

$$x^2$$

$$3$$

$$2$$

$$2^2$$

$$p=3 \quad \text{pour } x \in]-\infty, 2[, x^p < 2^p$$

$$p=2 \quad \text{pour } x \in]-2, 2[, x^p < 2^p$$

$$p=2 \quad \text{pour } x \in]\infty; -2[\cup]2; +\infty[$$

$$x^p > 2^p$$

$$p=3 \quad \text{pour } x \in]2; +\infty[$$

$$x^p > 2^p$$